Tema 2. ESPACIOS VECTORIALES

2.1 Definición de espacio vectorial, ejemplos y propiedades

2.2 Combinaciones lineales, dependencia e independencia lineales

2.3 Sistemas generadores, bases y dimensión

2.4 Subespacios vectoriales

2 ESPACIOS VECTORIALES

2.1 DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL, EJEMPLOS Y PROPIEDADES

2.1.1 DEFINICIÓN

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y un conjunto no vacío $\mathcal{U}$ cualquiera, consideramos dos operaciones definidas sobre él:

1. Ley de composición interna

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}\times\mathcal{U} & \xrightarrow{+} & \mathcal{U} \\ (u,v) & \longmapsto & u+v. \end{array}$$

2. Ley de composición externa

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times\mathcal{U} & \xrightarrow{\bullet} & \mathcal{U} \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda\cdot u. \end{array}$$

El conjunto $\mathcal{U}$ tiene <u>estructura de espacio vectorial</u> sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

1. $(\mathcal{U},+)$ es un grupo abeliano.
   (a) $\forall\, u,v,w\in\mathcal{U} \quad (u+v)+w=u+(v+w).$
   (b) $\forall\, u,v\in\mathcal{U} \quad u+v=v+u.$
   (c) $\exists\, 0_{\mathcal{U}}\in\mathcal{U}$ (elemento neutro) tal que

   $$\forall\, u\in\mathcal{U} \quad 0_{\mathcal{U}}+u=u+0_{\mathcal{U}}=u.$$

   (d) $\forall\, u\in\mathcal{U} \quad \exists\, -u\in\mathcal{U}$ (elemento opuesto) tal que

   $$u+(-u)=(-u)+u=0_{\mathcal{U}}.$$

2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall\, u \in \mathcal{U} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u.$
3. $\forall\, u \in \mathcal{U} \quad 1 \cdot u = u.$
4. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall\, u, v \in \mathcal{U}$
$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u,$$
$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

Los elementos del conjunto $\mathcal{U}$ se denominan **vectores** y los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ **escalares**.

EJEMPLOS: Los ejemplos más característicos de espacio vectorial son el plano, $\mathbb{R}^2$, el espacio tridimensional, $\mathbb{R}^3$, y en general, $\mathbb{R}^n$, todos ellos con las operaciones habituales de suma entre vectores y producto por escalares:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n).$$

2.1.2 PROPIEDADES

Dado un espacio vectorial $\mathcal{U}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se verifican las propiedades:

1. $\forall\, u \in \mathcal{U} \quad 0 \cdot u = 0_{\mathcal{U}}.$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot 0_{\mathcal{U}} = 0_{\mathcal{U}}.$
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$
$$\lambda \cdot u = 0_{\mathcal{U}} \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{o} \quad u = 0_{\mathcal{U}}.$$
4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \quad (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u).$

NOTACIÓN: A partir de ahora suprimiremos de la notación el símbolo "·", en la operación producto entre elementos del cuerpo, así como entre éstos y los del espacio vectorial. Además, $u - v$ denotará $u + (-v)$.

2.2 COMBINACIONES LINEALES, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEALES

2.2.1 DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$.

Se dice que un vector $v \in \mathcal{U}$ es <u>combinación lineal</u> de los vectores $u_1, \ldots, u_n$ si y sólo si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

2.2.2 DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$.

Se dice que los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son <u>linealmente independientes</u> ($\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un <u>sistema libre</u>) si y sólo si ninguno de los vectores se puede escribir como combinación lineal de los restantes.

En caso contrario se dice que los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son <u>linealmente dependientes</u> ($\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un <u>sistema ligado</u>).

2.2.3 PROPOSICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$.

Los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_{\mathcal{U}}.$$

2.2.4 PROPOSICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$.

Los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_{\mathcal{U}} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

2.2.5 PROPOSICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_n, v \in \mathcal{U}$.

1. Si existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u_i = 0_{\mathcal{U}}$, entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema ligado.

2. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema ligado, entonces $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ es también un sistema ligado.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ es un sistema libre, entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es también un sistema libre.

2.3 SISTEMAS GENERADORES, BASES Y DIMENSIÓN

2.3.1 DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$.

$\mathcal{S}$ es un <u>sistema generador</u> del espacio vectorial $\mathcal{U}$ si y sólo si cualquier vector $v \in \mathcal{U}$ es combinación lineal de vectores de $\mathcal{S}$, es decir,

$$\forall\, v \in \mathcal{U} \quad \exists\, u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{S} \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \text{tales que}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

2.3.2 DEFINICIÓN

Un espacio vectorial es <u>finitamente generado</u> si y sólo si posee algún sistema generador finito.

2.3.3 DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$.

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una <u>base</u> del espacio vectorial $\mathcal{U}$ si y sólo si:

- Es un sistema libre.
- Es un sistema generador.

EJEMPLO: La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, con

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

2.3.4 PROPOSICIÓN

Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{U}$, entonces cualquier vector de $\mathcal{U}$ se expresa, de forma única, como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

$$\forall\, v \in \mathcal{U} \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{únicos, tales que} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

NOTACIÓN: $v_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es el vector de las <u>componentes</u> o <u>coordenadas</u> de v en la base $\mathcal{B}$.

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \;\Leftrightarrow\; v_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

2.3.5 DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $S \subseteq \mathcal{U}$.

$$\langle S\rangle = \{u \in \mathcal{U} \mid \exists\, u_1, \ldots, u_n \in S\; \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\}.$$

$\langle S\rangle$ es el conjunto de combinaciones lineales de elementos de S.

OBSERVACIÓN: S es sistema generador de $\mathcal{U} \iff \mathcal{U} = \langle S\rangle$.

2.3.6 PROPOSICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_n, u \in \mathcal{U}$.

Si $u \in \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, entonces $\langle u_1, \ldots, u_n, u\rangle = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$.

2.3.7 TEOREMA

Todo espacio vectorial $\mathcal{U} \neq \{0_{\mathcal{U}}\}$ finitamente generado tiene base.

2.3.8 PROPOSICIÓN

Todas las bases de un mismo espacio vectorial finitamente generado tienen el mismo número de vectores.

2.3.9 DEFINICIÓN

Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial finitamente generado.

Se denomina <u>**dimensión**</u> del espacio vectorial $\mathcal{U}$, y se representa por $\dim \mathcal{U}$, al número de vectores de una cualquiera de sus bases.

2.3.10 PROPIEDADES

Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial finitamente generado de dimensión n, entonces:

1. $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{U}$ linealmente independientes $\Rightarrow m \leq n$.
2. $\{u_1, \ldots, u_m\}$ sistema generador de $\mathcal{U} \Rightarrow m \geq n$.
3. $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$ linealmente independientes $\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathcal{U}$.
4. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sistema generador de $\mathcal{U} \Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathcal{U}$.

2.4 SUBESPACIOS VECTORIALES

2.4.1 DEFINICIÓN

Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un subconjunto no vacío $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ respecto a las leyes de composición heredadas de $\mathcal{U}$.

2.4.2 PROPOSICIÓN

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{S}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{U}$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$.
2. $\forall\, u, v \in \mathcal{S} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$
   (a) $u + v \in \mathcal{S}$
   (b) $\lambda u \in \mathcal{S}$.
3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall\, u, v \in \mathcal{S} \quad \lambda u + \mu v \in \mathcal{S}$.

OBSERVACIÓN: Si $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$, entonces $0_{\mathcal{U}} \in \mathcal{S}$.

NOTA: $\{0_{\mathcal{U}}\}$ y $\mathcal{U}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{U}$ (subespacios triviales).

NOTA: $\dim(\{0_{\mathcal{U}}\}) = 0$.

2.4.3 PROPOSICIÓN

Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y S es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$, entonces toda combinación lineal de elementos de S pertenece a S:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall u_1, \ldots, u_n \in S \;\; \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in S.$$

2.4.4 PROPOSICIÓN

Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $S \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de $\mathcal{U}$ que contiene a S.

NOTACIÓN: $\langle S \rangle$ es el subespacio vectorial generado por S.

2.4.5 TEOREMA

Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial finitamente generado y $\mathcal{V}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$, entonces:

1. $\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{U}$.
2. $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V}$.